

ヒステリシスのモデリング

松尾哲司

京都大学 工学研究科 電気工学専攻

(第 11 回 電磁界数値解析に関するセミナー (2001) より)

まえがき

ヒステリシス特性は強磁性体を持つ大きな特徴の一つであるが、有限要素法などを用いた大規模電磁界解析の際には無視されることがこれまで多かった。これは、ヒステリシス特性の表現の複雑さによる解析上の困難あるいは計算コストの増大といった理由による。しかし、電気機器の解析の際には、ヒステリシス損や偏磁などのヒステリシス特性の評価は重要である。

そのため、ヒステリシス特性を簡便にかつ正確に表現するためのヒステリシスモデルが数多く提案されている。

ヒステリシスモデルは、過去の状態遷移(履歴)が現在の状態に及ぼす影響を表現することができるモデルである。電磁界解析に用いるヒステリシスモデルとしては、メジャーループや対称マイナーループのみならず、偏磁条件下における非対称マイナーループや高調波の重畳によって生じるマイナーループ、さらには初期磁化曲線や消磁など、様々な履歴の影響を簡潔にかつ精度良く記述する能力が望まれる。

本稿では、多くのヒステリシスモデルの中から代表的なモデルとして以下のモデルを紹介する。

1. 補間モデル, 2. Chua モデル,
3. J-A モデル, 4. S-W モデル,
5. プライザッハモデル,
6. プレイモデル, 7. ストップモデル

これらのモデルの殆どはスカラーヒステリシスモデルである。浅学な筆者にはこれら全てのモデルを詳細に述べる能力はなく、また、紙面にも限りがあることから、本稿では5のプライザッハモデルを中心に述べることにする。プライザッハモデルは、様々なヒステリシス特性をよく表現し、かつ、数学的な取扱いや計算機シミュレーションにも適しているため広く用いられているモデルである。また、本稿では今まで他で解説されることが少なかった6と7についても少し詳しく紹介する。これらのモデルは、プライザッハモデルと同程度の表現能力を持ちながら、プライザッハモデルより簡潔な記

述が可能であり、電磁界シミュレーションへの応用が期待されている。

1. 補間モデル

様々な振幅のヒステリシスループを測定し、測定した以外の振幅のヒステリシスループは測定した特性曲線を補間して求める方法である^{[1][2]}。測定された特性を直接用いるため、単純なヒステリシスループの再現精度はよいが、複雑なループの場合には、算出に工夫が必要である。

2. Chua モデル

鉄芯インダクタの電流 i および鎖交磁束 Ψ の関係を、

$$d\Psi/dt = g(i - f(\Psi)) \quad (1)$$

で与えると、 $i - \Psi$ 間のヒステリシス特性が表現できる^{[3][4]}。ここで、 f と g は単調増加の一価関数である。式(1)の関係は、非線形インダクタと非線形抵抗の並列回路(図 1)で表現される。ただし、 $i_L = f(\Psi)$ は非線形インダクタの電流、 $v_R = g(i_R)$ は非線形抵抗の電圧を表しており、その関数形はヒステリシスループの測定結果から決定できる^{[3][5]}。式(1)のモデルでは直流ヒステリシス特性が表現できないが、 dH/dt に関する項を付加して直流ヒステリシス特性を表現可能にする^{[4][6]}などの拡張がなされている。

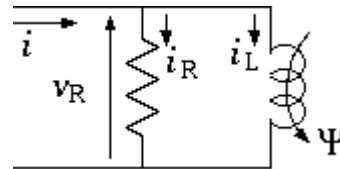


図 1 Chua モデル

3. Jiles-Atherton モデル

Jiles-Atherton(J-A)モデルは^{[7][8]}、磁壁移動によるヒステリシスを考慮したモデルである。J-A モデルは、磁化 M を可逆成分 M_{rev} と非可逆成分 M_{irr} の和として、

$$M = M_{irr} + M_{rev} \quad (2)$$

のように与える. ここで, M_{irr} と M_{rev} はそれぞれ,

$$dM_{\text{irr}}/dH = (M_{\text{an}} - M_{\text{irr}}) / \{\delta k - \alpha(M_{\text{an}} - M_{\text{irr}})\} \quad (3)$$

$$M_{\text{rev}} = c (M_{\text{an}} - M_{\text{irr}}) \quad (4)$$

$$M_{\text{an}} = M_S \{\coth(H_c/a) - a/H_c\} \quad (5)$$

によって与えられる. ただし, M_{an} は非履歴磁化特性, $H_c = H + \alpha M$ は有効磁界, α, k, c は, それぞれ, 相互作用, 磁壁束縛のエネルギー, 可逆分の割合に関するパラメータである. a もパラメータで磁界の次元を持つ. δ は磁界の増加時に 1, 減少時に -1 をとる. 上記パラメータの決定法も提案されている^[9]. 図 2 は,

$$\begin{aligned} M_S &= 1.7 \text{ MA/m}, & a &= 1000 \text{ A/m}, \\ k &= 500, 2000 \text{ A/m}, & \alpha &= 0.001, 0.002, \\ c &= 0.1 \end{aligned}$$

としたときに得られるヒステリシスループである. 図 2 から分かるように, J-A モデルは初期磁化特性も表現できるが, マイナーループ(特に非対称ループ)を表現するには工夫が必要であり幾つかの提案がなされている^{[10][11]}.

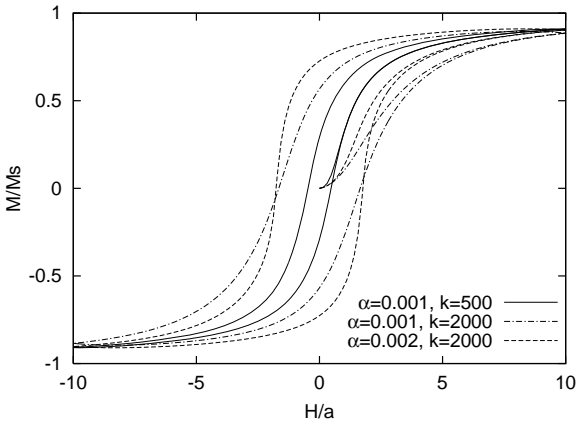


図 2 J-A モデル

4. Stoner-Wohlfarth モデル

Stoner-Wohlfarth(S-W)モデル^{[12][13]}は, 単一磁区一軸異方性の特徴を表す S-W 粒子の集合として磁化特性を表現するモデルである. S-W 粒子の磁化 M は一定の大きさを持ち, その方向が印加磁界 H によって変化する. 磁化の方向は, 異方性エネルギーと静磁エネルギーの和,

$$E = K \sin^2 \theta - \mu_0 M H \cos \varphi \quad (6)$$

が極小になる方向に向く. ここで, K は異方性定数, θ は磁化容易軸と磁界ベクトルのなす角度, φ は磁界ベクトルと磁化ベクトルのなす角度である. S-W 粒子の磁化特性を図 3 に示す.

S-W モデル全体の特性は, K/M の値や磁化容易軸方向が異なる様々な S-W 粒子の集合として表現される. S-W モデルはベクトルモデルであり, 単一の機構で可逆磁化と非可逆磁化の両方を表現することができ, また物理的意味も明快であるなどの利点を持っている. この基本モデルではマイナーループの表現が不十分であるのでいくつかの拡張モデルが提案されている^[14]. しかし, 基本モデル, 拡張モデルとも計算コストや同定する手法(容易軸方向などの分布を実測結果から決定する方法)の点で課題が残されている.

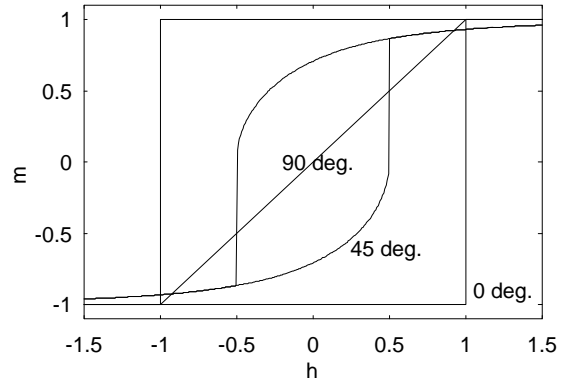


図 3 S-W 粒子の特性
($h = \mu_0 H M / K$, $m = \cos \varphi$, $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$)

5. プライザツハモデル

5.1 プライザツハモデルの原理

プライザツハモデル^{[15]-[18]}では, 強磁性体は多数の磁気双極子の集合体として表現される. 強磁性体を構成する磁気双極子は, 各々図 4 の角形ヒステリシス特性を示すものとする. 図 4 の双極子では, 磁界 H が増加して $H = H_u$ になると, 磁化 m が $-1/2$ から $1/2$ へ跳躍し(正に磁化され), 減少して $H = H_v$ になると, 逆に $1/2$ から $-1/2$ に跳躍する(負に磁化される).

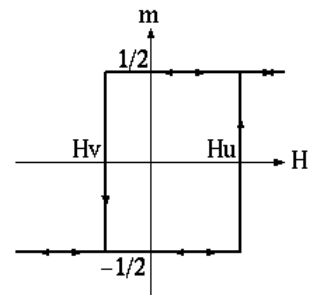


図 4 磁気双極子

このような磁気双極子の分布を与える分布関数を, H_u と H_v を用いて定義する. すなわち, $m = 1/2$ へ

の跳躍が生じる磁界の値が区間 $[H_u, H_u + dH_u]$ に属し、かつ、 $m = -1/2$ への跳躍が生じる磁界の値が区間 $[H_v, H_v + dH_v]$ に属する双極子の数は、 $K(H_u, H_v)dH_u dH_v$ により定まるものとし、 $K(H_u, H_v)$ をプライザツハ分布関数と呼ぶ。正、負の飽和磁界の強さを H_s , $-H_s$ で表し、また、逆方向に回る ($H_v > H_u$) 角形ヒステリシス特性はないものとする、 $K(H_u, H_v)$ の定義域は、

$$D_K: -H_s \leq H_v \leq H_u \leq H_s \quad (7)$$

で表される3角領域(図5)となる。

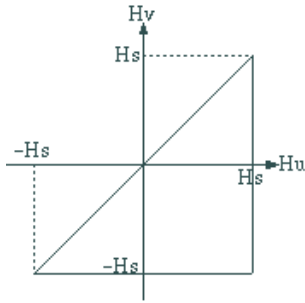


図5 分布関数の定義域 D_K

磁界 H の変化に応じて、領域 D_K における双極子の磁化状態が変化することにより、強磁性体全体の磁化 M が変化する。すなわち、強磁性体の磁化 M と磁界 H の関係は、

$$\begin{aligned} M(H) &= 1/2 \iint_{D(H)} K(H_u, H_v) dH_u dH_v \\ &\quad - 1/2 \iint_{D_K - D(H)} K(H_u, H_v) dH_u dH_v \\ &= \iint_{D(H)} K(H_u, H_v) dH_u dH_v + M_{\min} \end{aligned} \quad (8)$$

$D(H)$: 積分領域, $M_{\min} = M(-H_s)$

$$= -1/2 \iint_{D_K} K(H_u, H_v) dH_u dH_v: \text{定数}$$

によって与えられる。ここに、 $D(H)$ は領域 D_K において、双極子が正に磁化されている部分領域である。領域 D_K 内の双極子の磁化状態は H の増減によって、

- H が増加すると、 $H_u \leq H$ の範囲の双極子は全て正に磁化される
- H が減少すると、 $H_v \geq H$ の範囲の双極子は全て負に磁化される

のように変化するので、 $D(H)$ の範囲もこれに応じて変化する。たとえば、磁界 H が

$$H: -H_s \rightarrow H_s/2 \rightarrow -H_s/2 \rightarrow 0 \quad (9)$$

と変化したとする。このとき積分領域 $D(H)$ は次の(a)→(b)→(c)→(d)ように変化する。

- (a) $H = -H_s$ のとき、双極子は全領域で負に磁化されている(図6(a))
- (b) H が $H_s/2$ に増加すると、 $H_u \leq H_s/2$ の範囲の双極子が全て正に磁化される(図6(b))。
- (c) H が $-H_s/2$ に減少すると、 $H_v \geq -H_s/2$ の範囲の双極子が全て負に磁化される(図6(c))。
- (d) H が 0 に増加すると、 $H_u \leq 0$ の範囲の双極子が全て正に磁化される(図6(d))。

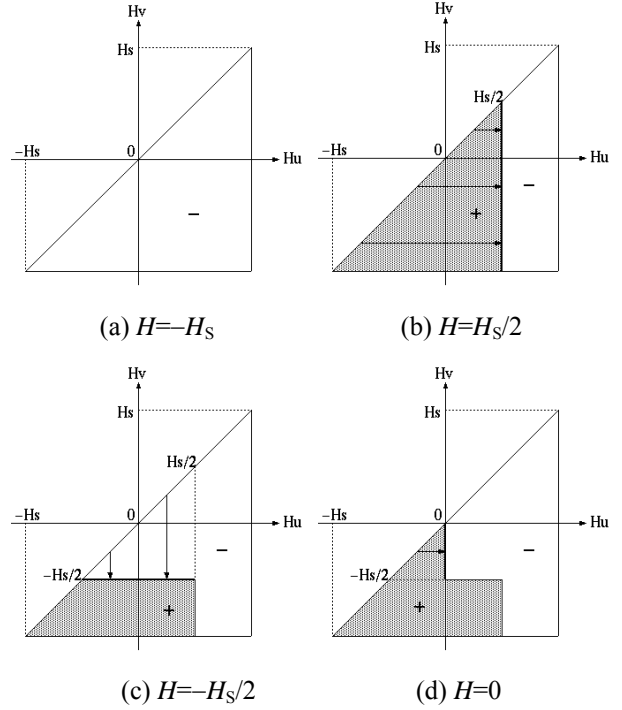


図6 磁化状態の変化

上の説明では、磁化 M と磁界 H との関係としてヒステリシス特性を表現したが、プライザツハモデルは、磁化ではなく磁束密度 B と磁界 H との関係を与えると考えても上と同様の説明が成り立つ。従って、以下、磁化 M の代わりに磁束密度 B を用いて説明を行うことにする。

5.2 計算方法

プライザツハモデルを計算機上で表現するには、例えば、以下のようにすればよい^[18]。

まず、区間 $[-H_s, H_s]$ を N 個の小区間 $[H_{n-1}, H_n]$ ($n=1, \dots, N$)に分割し、分布関数 $K(H_u, H_v)$ を離散化する。

$$K'(i, j) = \int_{H_{j-1}}^{H_j} \int_{H_{i-1}}^{H_i} K(H_u, H_v) dH_u dH_v \quad (10)$$

この離散化された分布関数(分布関数表) $K'(i, j)$ を用いると式(8)は、

$$B(H) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i K'(i, j) D'(i, j) + B_{\min} \quad (11)$$

$$(B_{\min} = B(-H_s) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i K'(i, j))$$

と書ける(磁化 M ではなく磁束密度 B を与える表現に書き換えている). ただし, 配列 $D'(i, j)$ は, 第 (i, j) 領域の磁化状態を表す補助配列で, 領域が正に磁化されているとき 1, 負に磁化されているとき 0 の値をとるものとする.

H の時点系列 $H^{[k]}(k=1, 2, \dots)$ が与えられたとき, 各時点で以下のように $D'(i, j)$ を変化させて式(11)を計算する.

- S1: $H^{[k]}$ の属する小区間 $[H_{n-1}, H_n]$ を見つける.
- S2: $H^{[k]} > H^{[k-1]}$ なら S3 へ, そうでなければ S4 へ.
- S3: $i < n$ の部分について $D'(i, j)$ の値をすべて 1 として S5 へ.
- S4: $j > n$ の部分について $D'(i, j)$ の値をすべて 0 として S5 へ.
- S5: 式(11)を計算する.

たとえば, 磁界 H が式(9)のように変化した場合, $D(H)$ の変化に対応して $D'(i, j)$ は図 7 のように変化する. ただし, 図 7 は $N=8$ の場合を示している.

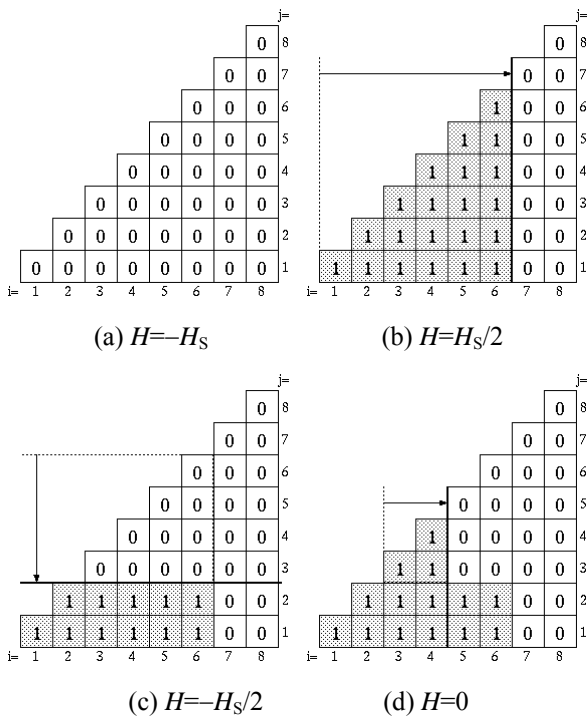


図 7 $D'(i, j)$ の変化

上記のアルゴリズムは単純で分かりやすくコーディングも容易であるが, 次のような欠点を持っている.

(a) $D'(i, j)$ の値が 0 から 1 (1 から 0 へ) 跳躍するので, 関数値が不連続に変化する. このため, Newton 法などの収束計算により入力 H を逆に求

める場合には収束に問題が生じやすい.

(b) 有限要素法で用いる場合には各要素毎に磁化状態を表す 2 次元配列 $D'(i, j)$ が必要で, 大きな記憶容量が必要となる.

問題点(a)については, D' の値を 0 と 1 の間で連続的に変化させる方法が提案されている^[19]. (b) については, 2 次元配列 D' を記憶するのではなく, D' の値の 0 と 1 の境界をなす区間番号を記憶する 1 次元配列を用いる方法が提案されている^[20]. また, 後述のプレイモデルを用いれば問題点(a)(b)をともに解消することができる.

プライザツハモデルの計算法については, 他にも種々の方法^{[16][17]}が存在するがここでは省略する.

5.3 逆関数

電磁界解析の際には, 磁束密度 B から磁界 H を求める必要がしばしばある. 従って, 与えられた出力 B に対して入力 H を逆に求める必要がある.

(a) ニュートン法などの反復計算により入力 H を求める.

(b) B から H へのヒステリシス特性を直接構成する方法を用意する.

のどちらかが必要である. (b) の方法としては, プライザツハモデルを用いて構成する方法(逆分布関数法^[20], M-B 分布関数法^[21])が提案されている. また, 後述のストップモデルを用いるという選択も考えられる.

5.4 プライザツハモデルの同定手法

プライザツハモデルでは, 分布関数 $K(H_u, H_v)$ あるいは分布関数表 $K'(i, j)$ を決定することによりヒステリシス特性が定まる. 強磁性体の磁気特性の測定結果から分布関数を決定する方法としては, 以下のような直接法と関数近似による方法がある.

5.4.1 直接法

同定の便宜のため, 図 8 の領域における分布関数の積分値である次の関数を定義する.

$$F(H_a, H_b) = \int_{H_b}^{H_a} \int_{H_b}^{H_u} K(H_u, H_v) dH_v dH_u \quad (12)$$

この積分はエベレット積分と呼ばれる(ただし, 通常は $E(H_b, H_a) = F(H_a, H_b)$ で定義される関数 E をエベレット関数と呼ぶ). 上の関数 F の値を測定できれば, 分布関数は,

$$K(H_u, H_v) = -\partial^2 F(H_u, H_v) / \partial H_u \partial H_v \quad (13)$$

として求められる^{[16][17]}.

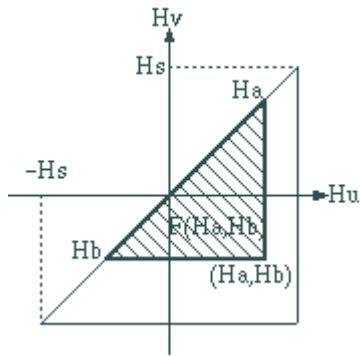


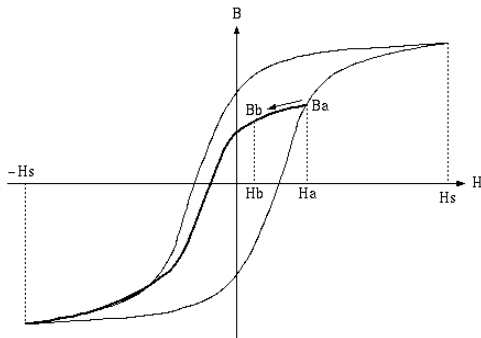
図8 関数 $F(H_a, H_b)$

させ(図 9(b))たときの磁束密度 B_a と、その後、磁界を H_b まで減少させ(図 9(c))たときの磁束密度 B_b から、

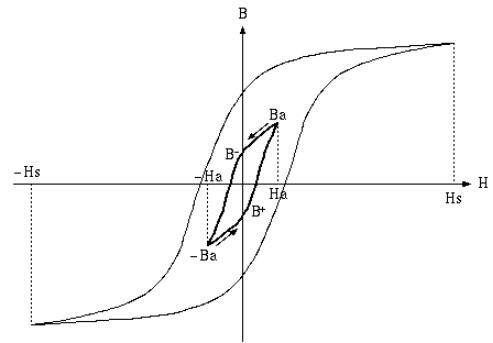
$$F(H_a, H_b) = B_a - B_b \quad (14)$$

として、 F が求められる^[16]。

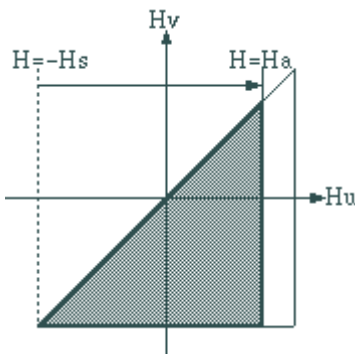
実際には F を求めるためには、必ずしも下降曲線群を測定する必要はなく、対称なヒステリシスループ群を測定しても F を求めることができる。このことは、他で述べられることが少ないので以下にその手法を述べる。



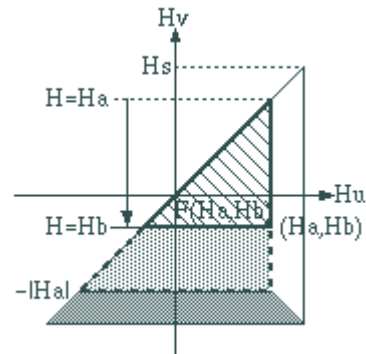
(a) 下降曲線



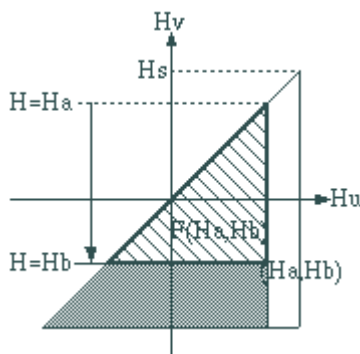
(a) 対称曲線



(b) $H=H_a$

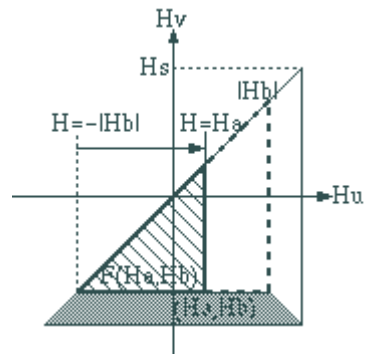


(b) $H_b \geq -H_a$



(c) $H=H_b$

図9 下降曲線からの同定



(c) $H_b \leq -H_a$

図10 対称曲線からの同定

関数 F を求めるには、図 9(a) のような下降曲線を多数測定するのが一般的である。すなわち、まず、負の飽和磁界 $-H_s$ を与え、次に磁界を H_a まで増加

図 10(a) のように、振幅 H_a の対称ループにおいて、その上昇曲線を $B^+(H_a, H)$ 、下降曲線を $B^-(H_a, H)$ とする。このとき、

$H_b \geq -H_a$ のとき,

$$F(H_a, H_b) = B^+(H_a, H_a) - B^-(H_a, H_b) \quad (15)$$

$H_b \leq -H_a$ のとき,

$$F(H_a, H_b) = B^+(H_b, H_a) - B^+(H_b, H_b) \quad (16)$$

とすれば F が求められる. ただし, 式(15)は図 10(b)の領域を表しており, このとき $H_a \geq 0$ であり, また, 式(16)は図 10(c)の領域を表しており, このとき $H_b \leq 0$ である.

分布関数 $K(H_u, H_v)$ ではなく, 分布関数表 $K'(i, j)$ を求める場合には,

$$K'(i, j) = F(H_i, H_{j-1}) - F(H_i, H_j) - F(H_{i-1}, H_{j-1}) + F(H_{i-1}, H_j) \quad (17)$$

とすればよい(図 11).

Ni-Zn フェライトリングコアの磁気特性を測定し, 式(15)(16)(17)により分布関数 $K'(i, j)$ を決定してプライザツハモデルを構成した例を図 12 に示す.

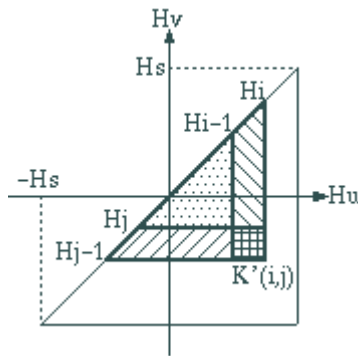


図 11 分布関数表の算出

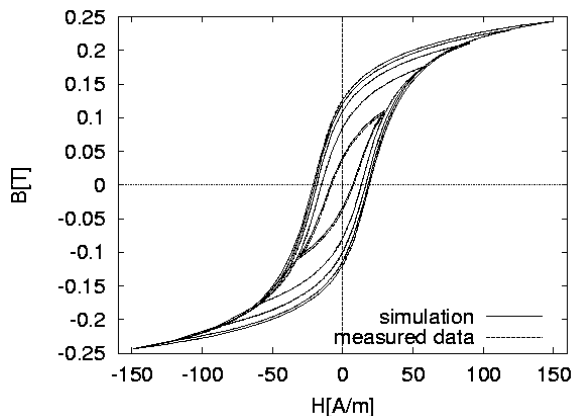


図 12 プライザツハモデルの同定結果の例

5.4.2 関数近似法

直接法はエベレット関数の 2 階微分(13)を利用するため, 測定精度の影響を受けやすく, また, 分布

関数に負の値が現れることがしばしばある.

そこで, 分布関数としてある関数形を仮定し, その関数のパラメータを実験的に決定する方法も用いられる. 関数形としては, ガウス分布を用いた,

$$K(H_a, H_b) = \frac{1}{4\sigma_c\sigma_i} \exp\left[-\frac{\left(\frac{H_a - H_b}{2} - H_c\right)^2}{2\sigma_c^2}\right] \times \exp\left[-\frac{\left(\frac{H_a + H_b}{2}\right)^2}{2\sigma_i^2}\right] \quad (18)$$

がよく用いられる. パラメータ σ_c, σ_i, H_c の値はヒステリシスループの測定結果から決定される^[17].

5.5 プライザツハモデルによるヒステリシス特性の特徴

プライザツハモデルが表現するヒステリシス特性の特徴として, 主に次の 2 つがあげられる^[16].

[合同性(congruency property)]: 振動する入力を加えた場合, 入力が等しければ, 生じるマイナーループの形はそれ以前の履歴によらず合同となる. たとえば, 図 13 は $H_a \leq H \leq H_b$ の間を振動する磁界によって生じるマイナーループであるが, 履歴の違いにより位置は異なるが形は合同である.

[記憶の消去性(wiping-out property)]: 過去の入力の極大値(極小値)の影響は, それより大きい極大値(小さい極小値)が新たに入力されると消去される. 図 14 の極大値 H_g は H_g より小さいそれ以前の極大値 H_c と H_e の影響を消去する. すなわち, H_g は $H_u \leq H_g$ となる双極子を全て正にするため, $H_u = H_c, H_e$ に存在していた $D(H)$ の境界は消去される. 同様に図 14 の極小値 H_h は極小値 H_d と H_f の影響を消去する.

あるヒステリシス特性がプライザツハモデルで表現されるための必要十分条件は, 上記 2 つの特性を持つことである^[16].

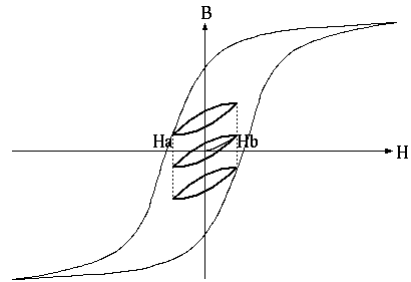


図 13 マイナーループの合同

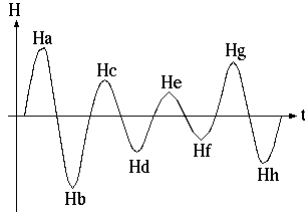


図 14 履歴の消去

5.6 プライザツハモデルの拡張

実際の強磁性体は前述の合同特性を持たないので、合同特性はプライザツハモデルの欠点の一つである。この合同特性を解消するように種々の方法でモデルの拡張が提案されている^{[16][17]}。

また、動的モデル^[16]やベクトルモデル^{[16][17][22]}などの拡張も提案されている。たとえば、Mayergoyz は、スカラプライザツハモデルを角度方向に重ね合わせて、

$$B(H) = \int_0^\pi e_\varphi B_\varphi(e_\varphi \cdot H) d\varphi \quad (19)$$

と表現するベクトルモデルを提案している^[16]。ここで、 e_φ は φ 方向の単位ベクトルであり、各 φ 方向に対するスカラヒステリシス特性 B_φ はスカラプライザツハモデルで表現される。

5.7 収束計算時の注意点

プライザツハモデルを、有限要素解析や回路シミュレーションに用いる場合には、以下のような注意が必要である。

[連続性] B から H を求める場合、あるいは陰解法の使用時になど、 H を未知数としてこれをニュートン法などの収束計算で求める場合、出力 B は入力 H の連続関数である必要がある。5.2 で述べた方法は前述のように出力が不連続に変化するので収束計算に用いるのは不向きである。

[履歴の更新] 収束計算時、 H の値が確定するまでは履歴を更新してはいけない。例えば、前時点の H が 0.5 のとき、現時点の H の値を収束計算により、

$$H^{(0)}=0.5 \rightarrow H^{(1)}=0.55 \rightarrow H^{(2)}=0.54$$

のように探索するとする。このとき、 $H=0.5 \rightarrow 0.54$ と単調に増加した場合と、 $H=0.5 \rightarrow 0.55 \rightarrow 0.54$ と増加後減少した場合とでは、 B の値が異なる。このため、 $H^{(1)}$ に対する B を計算後、磁化状態を $H^{(0)}$ の状態に戻してから $H^{(2)}$ に対する B を計算する必要がある。すなわち、現時点の H の値が確定するまでは、前時点における磁化状態を保持しておく必要がある。

6. プレイモデル

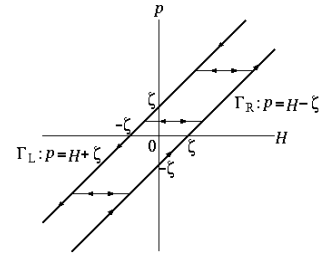
6.1 プレイモデルの原理

プレイモデル^{[23]-[25]}は図 15 に示すプレイヒステロンを用いてヒステリシス特性を表現するモデルである。

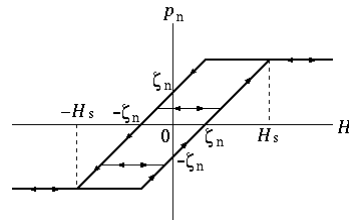
図 15(a)のプレイヒステロンにおいて、枝 Γ_R : $p = H - \zeta$ は H の増加時のみ、枝 Γ_L : $p = H + \zeta$ は H の減少時のみ用いられる。ここで、 ζ はプレイヒステロンの幅を与える非負のパラメータである。 H が増加から減少または減少から増加に転じると、点 (H, p) は Γ_R と Γ_L の間を水平に移動する。水平な枝上では両方向に移動可能である。このプレイヒステロンの特性は、

$$p(H) = \max(\min(p^0, H + \zeta), H - \zeta) \quad (20)$$

と表現される。ここで、 p^0 は前時点でのプレイヒステロン p の値である。



(a) 通常のプレイヒステロン



(b) 飽和を考慮した場合

図 15. プレイヒステロン

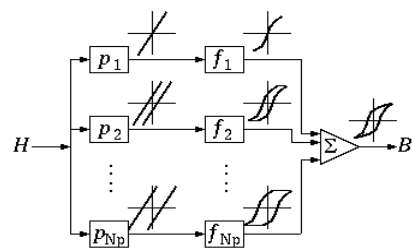


図 16 プレイモデル

プレイモデルでは、磁界 H に対する磁束密度 B の間のヒステリシス特性を、図 16 のように様々な幅 ζ についてのプレイヒステロンの重ねあわせとして次のように表現する。

$$B(H) = \sum_{n=1}^{N_p} f_n(p_n(H)) \quad (21)$$

$$p_n(H) = \max(\min(p_n^0, H + \zeta_n), H - \zeta_n) \quad (22)$$

ただし、 N_p 個はプレイヒステロンの数、 p_n ($n = 1, \dots, N_p$) は幅 ζ_n のプレイヒステロン、 f_n は p_n に対する一価関数であり形状関数と呼ばれる。

図 15(a)からわかるように、プレイヒステロンの作るヒステリシスループは反時計回りであり、それゆえ、プレイモデルは、磁界 H の入力に対して磁束密度 B を出力とするヒステリシス特性を表現するのに適している。また、形状関数 f_n を連続関数にすれば関数 $B(H)$ は連続関数となる。さらに、式(22)の H に関する微分が容易に求められることから、式(21)のプレイモデルはニュートン法と適合性よく用いることができる。

ヒステリシス特性 $B(H)$ が飽和特性を持ち、 $|H|$ がある値 H_S 以上で関数 $B(H)$ が一価関数になる場合には、 $\zeta_n \neq 0$ のヒステロンに対して、図 15(b)のように各プレイヒステロンを飽和させて $|H| > H_S$ で一価関数とするか、あるいは、 $|p_n| \geq H_S - \zeta_n$ で $f_n(p_n)$ が一定となるようにすればよい^[25]。このとき、 $0 < \zeta_n < H_S$ のヒステロンに対する形状関数 $f_n(p_n)$ は、

$$-H_S + \zeta_n \leq p_n \leq H_S - \zeta_n \quad (23)$$

の範囲で値が定義されていれば十分である。 $\zeta_n \geq H_S$ となるヒステロンは常に $p_n = 0$ となるので不要である。 $\zeta_n = 0$ のヒステロンは、 $p_n(H) = H$ となりヒステリシス特性を持たないので、 $\zeta_n = 0$ のヒステロンに対応する f_n は可逆部の特性を表すことになる(定義域は $-\infty < p_n < \infty$ とする)。

このプレイモデルのヒステリシス特性は静的スカラプライザツハモデルによる特性と等価であることが知られている(6.2 参照)。従って、プライザツハ分布関数から形状関数 f_n ($n=1, \dots, N_p$) を構成することや、その逆も可能である。ただし、プライザツハモデルでは磁気双極子の磁化状態の 2 次元分布を記憶しておく必要があるのに対して、プレイモデルでは p_n ($n=1, \dots, N_p$) の値を記憶しておくだけでよい。従って、記憶容量あるいは記憶に関するアルゴリズムの簡略性の点でプレイモデルの方がプライザツハモデルより有利であると考えられる。プレイモデルのアルゴリズムの簡略性については、式(21)(22)の計算機上での表現が容易であることから理解される。たとえば、プレイモデルでは入力の増加時と減少時を区別する必要がないが、これは、式(22)の \max と \min の両関数で両方の場合を考

慮しているためである。

6.2 プライザツハモデルとの比較

プライザツハモデルとの比較のため、式(21)のプレイモデルを次のように ζ について連続な表現に書き換える。

$$B(H) = \int_0^{H_S} f(\zeta, p_\zeta(H)) d\zeta \quad (24)$$

ここで、形状関数 $f(\zeta, p)$ の p に関する偏微分、

$$\mu(\zeta, p) = \partial f(\zeta, p) / \partial p \quad (25)$$

を用い、式(23)の定義域を考慮すると、式(24)は、

$$B(H) = \int_0^{H_S} \int_{H_S - \zeta}^{p_\zeta(H)} \mu(\zeta, p) dp d\zeta + B(-H_S) \quad (26)$$

と書き直すことができる。ここで、

$$H_u = p + \zeta, \quad H_v = p - \zeta \quad (27)$$

と変数変換し、

$$K(H_u, H_v) = \mu(\zeta, p) / 2 \quad (28)$$

とおくと、式(26)で表されるヒステリシス特性は式(28)の分布関数を持つプライザツハモデルと等しくなる^{[24][26]}。

ζ について離散化したモデルでは、

$$\zeta_n = (n-1)H_S / N_p \quad (n = 1, 2, \dots, N_p) \quad (29)$$

とおき、形状関数を区分線形とし、 $p_{n,m-1} \leq p \leq p_{n,m}$ の p に対して、

$$f_n(p) = f_{n,m-1} + \mu'(n,m)(p - p_{n,m-1}) \quad (30)$$

とする。ただし、

$$p_{n,m} = 2mH_S / N_p - H_S + \zeta_n = m\Delta p - H_S + \zeta_n$$

$$(m = 0, \dots, N_p - n + 1), \quad \Delta p = 2H_S / N_p \quad (31)$$

であり、

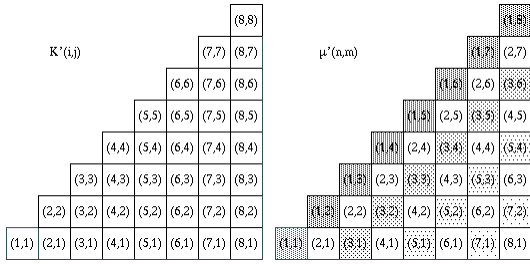
$$f_{n,m-1} = f_n(p_{n,m-1}) \quad (32)$$

$$\mu'(n,m) = (f_{n,m} - f_{n,m-1}) / \Delta p \quad (33)$$

である。このとき、等価なプライザツハモデルの分布関数表を $K'(i,j)$ ($i=1, \dots, N_p, j=1, \dots, i$) とすると、プレイモデルの形状関数の傾き μ' は、

$$\mu'(n,m) = K'(n+m-1, m) / \Delta p \quad (34)$$

で与えられる。例えば、 $N=N_p=8$ のとき、図 17(a)の $K'(i,j)$ は、図 17(b)の同じ位置の $\mu'(n,m)$ と対応する。図 17(b)からわかるように、プレイモデルは、プライザツハモデルの磁化状況を斜め方向に記憶する(正負の境界の位置が $p_n(H)$ で表される)モデルであると考えることができる。



(a) $K'(i,j)$ (b) $\mu'(n,m)$
 図 17 プライザツハモデルの K' と
 プレイモデルの μ' との関係

7. ストップモデル

7.1 ストップモデルの原理

ストップモデル^{[23]-[25][27]}では、磁束密度 B に対する磁界 H の関係が、

$$H(B) = \sum_{n=1}^{N_s} g_n(s_n(B)) \quad (35)$$

のように表現される。ここで、 N_s はストップヒステロンの数、 $s_n(n=1, \dots, N_s)$ はストップヒステロン、 g_n は s_n に対する一価関数(形状関数)である。ただし、ストップヒステロン s_n は、

$$s_n(B) = \max(\min(B - B^0 + s_n^0, \eta_n), -\eta_n) \quad (36)$$

で与えられる(図 18(a))。ここで、 (B^0, s_n^0) は前時点での (B, s_n) の値であり、 η_n はストップヒステロン s_n の高さ(正定数)である。図 18(a)から分かるように、磁束密度 B が増加するときのみ点 (B, s_n) は枝 $s_n = \eta_n$ 上を移動し、 B が減少するときのみ点 (B, s_n) は枝 $s_n = -\eta_n$ 上を移動する。また、 B が増加から減少に転じると、点 (B, s_n) は、枝 $s_n = -\eta_n$ に達するまで傾き 1 の枝上を移動する。磁束密度 B が減少から増加に転じたときも同様に点 (B, s_n) は傾き 1 の枝上を移動する。式(35)より、ストップモデルでは、様々な高さ η_n を持つストップヒステロンの出力 (s_n) を、関数 g_n で変換してから重ね合わせることによって、ヒステリシス関数 $H(B)$ が構成される(図 19 参照)。

図 18(a)からもわかるように、ストップヒステロンの作るヒステリシスループは時計回りであり、プレイヒステロンの作るループと逆回りである。それゆえ、ストップモデルは、磁束密度 B の入力に対して磁界 H を出力するヒステリシス特性を表現するのに適している。式(36)の B に関する微分も容易であり、式(35)のヒステリシスモデルもニュートン法と適合性よく用いることができる。

ヒステリシス特性 $H(B)$ が飽和特性を持ち、 $|B|$ がある値 B_s 以上で関数 $H(B)$ が一価関数になる場合は、

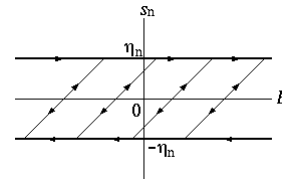
式(36)において、 $|B^0|$ の値が B_s を越えないように制限する必要がある。このとき、ストップヒステロンの特性は図 18(b)のようになり、 $|B| > B_s$ ではヒステリシス特性を持たなくなる^[25]。さらにこの場合、 $\eta_n \geq B_s$ となるヒステロンは 1 個で十分となり、通常はこのヒステロンの η_n を ∞ として、

$$s_n(B) = B \quad (37)$$

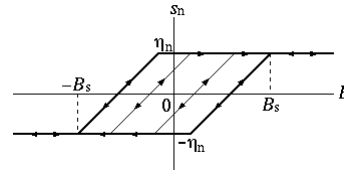
とすればよい。 $\eta_n = \infty$ のヒステロンはヒステリシス特性を持たないので、このヒステロンに対応する g_n は可逆部の特性を表すことになる(定義域は $-\infty < s_n < \infty$ とする)。また、 $0 < \eta_n < B_s$ のヒステロンに対応する形状関数 g_n の定義域は、

$$-\eta_n \leq s_n \leq \eta_n \quad (38)$$

となる。



(a) 通常のストップヒステロン



(b) 飽和を考慮した場合

図 18 ストップヒステロン

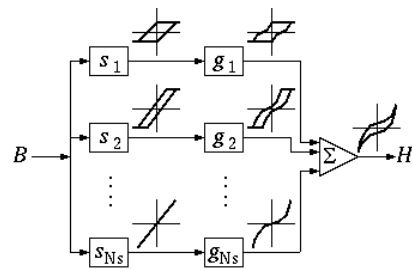


図 19 ストップモデル

ストップヒステロンの動作を、例をあげて説明する。ここでは $N_s = 8$ とし、 $\eta_n = nB_s/N_s$ とおく。図 20 は磁束密度 B が、

$$B: -B_s \rightarrow -B_s/2 \rightarrow 0 \rightarrow B_s/2 \rightarrow 0 \rightarrow -B_s/2 \rightarrow 0 \rightarrow B_s/2 \quad (39)$$

のように変化した場合のストップヒステロン $s_n(n=1, \dots, 8)$ の値の変化を示している。

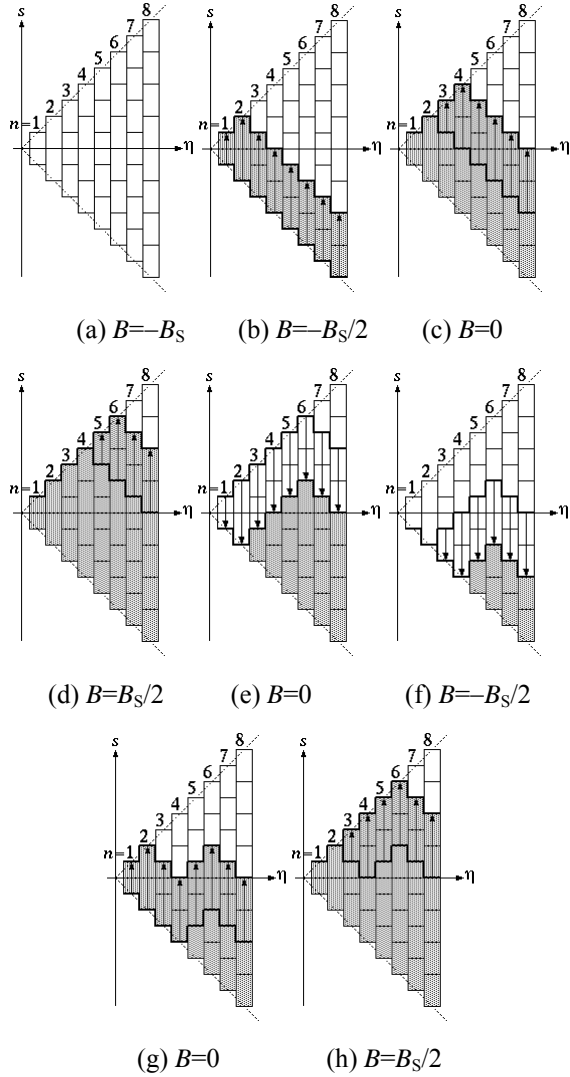


図 20 ストップヒステロンの動作

(a) $B = -B_S$ のとき全てのヒステロン s_n はその下限値 $-\eta_n$ となっている(図 20(a)).

(b) $B = -B_S/2$ と増加すると各ヒステロンの値は $B_S/2$ だけ増加する. ただし, s_1 は上限値 η_1 に達しているためそれ以上は増加しない(図 20(b)).

(c) $B = 0$ と増加すると各ヒステロンの値はさらに $B_S/2$ だけ増加する. ただし, s_1, s_2, s_3 はそれぞれ上限値 η_1, η_2, η_3 に達しているためそれ以上は増加しない(図 20(c)).

(d) $B = B_S/2$ と増加すると各ヒステロンの値はまた $B_S/2$ だけ増加する. ただし, s_1, \dots, s_5 はそれぞれ上限値 η_1, \dots, η_5 に達しているためそれ以上は増加しない(図 20(d)).

(e) $B = 0$ と減少すると各ヒステロンの値は $B_S/2$ だけ減少する. ただし, s_1 は下限値 $-\eta_1$ に達しているためそれ以上は減少しない(図 20(e)).

(f) $B = -B_S/2$ と減少すると各ヒステロンの値はさ

らに $B_S/2$ だけ減少する. ただし, s_1, s_2, s_3 はそれぞれ下限値 $-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3$ に達しているためそれ以上は減少しない(図 20(f)).

(g) $B = 0$ と増加すると各ヒステロンの値は $B_S/2$ 増加する. ただし, s_1 は上限値に達しているためそれ以上は増加しない(図 20(g)).

(h) $B = B_S/2$ と増加すると各ヒステロンの値はまた $B_S/2$ 増加する. ただし, s_1, s_2, s_3 は上限値に達しているためそれ以上は増加しない(図 20(h)).

以上のように, 各ストップヒステロンはその上限(あるいは下限)の値に達しないうちは入力増加に直ちに反応して出力が増加(減少)するが, 上限値(あるいは下限値)に達すると出力の増加(減少)は停止する. このように, 入力の増減が反転すると同時に出力は増減を反転させるが, 出力は入力より早く増減を停止することから, 出力は入力より位相が早くなる.

7.2 マイナーループの性質

ストップモデルの性質と同定法の説明のため, 式(35)のストップモデルを次のように η について連続な表現に書き換える.

$$H(B) = \int_0^{B_S} g(\eta, s_\eta(B)) d\eta \quad (40)$$

ここで, 形状関数 $g(\eta, s)$ の s に関する偏微分

$$\kappa(\eta, s) = \partial g(\eta, s) / \partial s \quad (41)$$

を用いると, 式(40)は

$$H(B) = \int_0^{B_S} \int_{-\eta}^{s_\eta(B)} \kappa(\eta, s) ds d\eta + H(-B_S) \quad (42)$$

と書き直すことができる. ただし, $\kappa(\eta, s)$ は $0 \leq \eta \leq B_S, -\eta \leq s \leq \eta$ の範囲で定義されるとする.

振幅 a ($0 \leq a \leq B_S$) の周期入力,

$$B = u + B_0 \quad (-a \leq u \leq a) \quad (43)$$

が与えられたとする. ただし, B_0 は任意の直流バイアス ($|B_0| \leq B_S - a$) である. また, 入力 B は $B_0 \pm a$ 以外の極値を持たないものとする. この周期入力に対して, $\eta < a$ の範囲のヒステロンは, 入力の増減の途中で出力が上限と下限に達して増減を停止し,

$$s_\eta(B) = \begin{cases} \min(u - \eta + a, \eta) \\ \max(u + \eta - a, -\eta) \end{cases} \quad (44)$$

のように変化してヒステリシス特性を示す.

他方, $\eta \leq a$ の範囲のヒステロンは, 入力の増減に対して,

$$s_\eta(B) = u + s_{\eta 0} \quad (45)$$

のように一価関数的に応答する。ただし、 $s_{\eta_0}=s_{\eta}(B_0)$ は周期入力以前の履歴によって決まる定数である。

この周期入力に対して($B, H(B)$) はマイナーループを作るが、その上昇曲線側の出力 $H(B)$ を $H^+(a, B)$, 下降曲線側を $H^-(a, B)$ とする。マイナーループの縦方向の間隔(H 方向の差)は、

$$H^+(a, B) - H^-(a, B) = \int_0^a \int_{\max(u+\eta-a, -\eta)}^{\min(u-\eta+a, \eta)} \kappa(\eta, s) ds d\eta = R(\alpha, \beta) \quad (46)$$

で与えられる。ただし、

$$R(\alpha, \beta) = \int_0^\beta \int_0^\alpha \kappa_r d\alpha' d\beta' \quad (47)$$

であり、 $\alpha=(a-u)/\sqrt{2}$, $\beta=(a+u)/\sqrt{2}$, $\alpha'=(\eta-s)/\sqrt{2}$, $\beta'=(\eta+s)/\sqrt{2}$, $\kappa_r(\alpha, \beta)=\kappa(a, u)$ である(図 21 参照)。式(46)より、等しい振幅の周期入力に対するマイナーループの縦方向の間隔は、マイナーループの場所(直流バイアス B_0 や履歴)によらず等しいことが分かる^[28]。

この性質は実際の強磁性体に一般には見られない性質である。従って、ストップモデルの欠点であり、何らかの改良が必要であると考えられる。

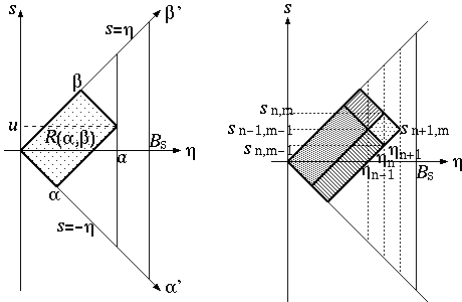


図 21 R の積分領域

図 22 同定に用いる R'

7.3 ストップモデルの同定

式(47)より、 $\kappa(a, u)$ は、

$$\kappa(a, u) = \kappa_r(\alpha, \beta) = \partial^2 R / \partial \alpha \partial \beta \quad (48)$$

で与えられることが分かる。

η について離散化したモデルでは、

$$\eta_n = nB_s / N_s \quad (n = 1, 2, \dots, N_s) \quad (49)$$

とおき、形状関数を区分線形とし、

$$g_n(s) = g_{n,m-1} + \kappa'(n, m)(s - s_{n,m-1}) \quad (50)$$

とする。ただし、

$$s_{n,m} = 2mB_s / N_s - \eta_n = m\Delta s - \eta_n \quad (m = 0, \dots, n), \Delta s = 2B_s / N_s \quad (51)$$

であり、

$$g_{n,m-1} = g_n(s_{n,m-1}) \quad (52)$$

$$\kappa'(n, m) = (g_{n,m} - g_{n,m-1}) / \Delta s \quad (53)$$

である。このとき、振幅 $a = \eta_n$ ($n = 1, \dots, N_s$)の周期入力(43)に対する上昇曲線と下降曲線から、 $\kappa'(n, m)$ ($m = 1, \dots, n$) は、

$$\kappa'(n, m) = \{R'(\eta_{n+1}, s_{n+1, m}) - R'(\eta_n, s_{n, m}) - R'(\eta_n, s_{n, m-1}) + R'(\eta_{n-1}, s_{n-1, m-1})\} / \Delta s \quad (54)$$

で与えられる^[28](図 22 参照)。ここで、

$$R'(\eta_n, s_{n, m}) = \begin{cases} H^+(\eta_n, s_{n, m} + B_{0n}) & (0 \leq n \leq N_s, \\ -H^-(\eta_n, s_{n, m} + B_{0n}) & 0 \leq m \leq n) \\ H^+(\eta_{N_s}, s_{N_s, m}) - H^-(\eta_{N_s}, s_{N_s, m-1}) & (n = N_s + 1, \\ & 1 \leq m \leq N_s) \end{cases} \quad (55)$$

である。

Ni-Zn フェライトリングコアの磁気特性を測定し、式(50)(54)(55)により形状関数を決定してストップモデルを構成した例を図 23 に示す。

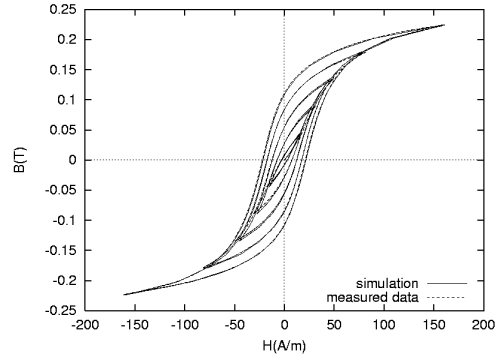


図 23 ストップモデルの同定結果の例

むすび

以上、プライザツハモデル、プレイモデル、ストップモデルを中心にヒステリシスモデルを紹介した。これらのモデルは、強磁性体のスカラヒステリシス特性を表現する高い能力を持っている。しかし、電磁界解析の際にはベクトル磁気特性の表現が重要である。上記のモデルのベクトル化モデルも提案されているが、電磁鋼板のベクトル磁気特性を十分に表現するには至っていないと考えられる。今後、ベクトルヒステリシス特性の表現能力の向上が課題である。

文 献

- [1] K. Muramatsu, N. Takahashi, T. Nakata, M. Nakano, Y. Ejiri and J. Takehara: "3-D Time-Periodic Finite Element Analysis of Magnetic Field in Non-Oriented Materials Taking into Account Hysteresis Characteristics", *IEEE Trans. Magn.*, **33**, 2, 1584-1587 (1997).
- [2] N. Takahashi, T. Kayano, K. Miyata, K. Ohashi: "Effect of Minor Loop on Magnetic Characteristics of Permanent Magnet Type of MRI", *IEEE Trans. Magn.*, **35**, 3, 1893-1896 (1999).
- [3] L. O. Chua and K. A. Stromsmoe: "Lumped-Circuit Models for Nonlinear Inductors Exhibiting Hysteresis Loops", *IEEE Trans. Circuit Theory*, **17**, 4, 564-574 (1970).
- [4] L. O. Chua and S. C. Bass: "A Generalized Hysteresis Model", *IEEE Trans. Circuit Theory*, **19**, 1, 36-48, 1972.
- [5] Y. Saito, S. Hayano, T. Yamamura and N. Tsuya: "A Representation of Magnetic Hysteresis", *IEEE Trans. Magn.*, **20**, 5, 1434-1436 (1984).
- [6] Y. Saito, S. Hayano and Y. Sakaki: "A Parameter Representing Eddy Current Loss of Soft Magnetic Materials and its Constitutive Equation", *J. Appl. Phys.*, **64**, 10, 5684-5686 (1988).
- [7] D. C. Jiles and D. L. Atherton: "Theory of Ferromagnetic Hysteresis", *J. Appl. Phys.*, **55**, 6, 2115-2120 (1984).
- [8] D. C. Jiles and D. L. Atherton: "Theory of Ferromagnetic Hysteresis", *J. Magnetism and Magnetic Materials*, **61**, 48-60 (1986)
- [9] D. C. Jiles, J. B. Thoeke and M. K. Devine: "Numerical Determination of Hysteresis Parameters for the Modeling of Magnetic Properties Using the Theory of Ferromagnetic Hysteresis", *IEEE Trans. Magn.*, **28**, 1, 27-35 (1992).
- [10] K. H. Carpenter: "A Differential Equation Approach to Minor Loops in the Jiles-Atherton Hysteresis Model", *IEEE Trans. Magn.*, **27**, 6, 4404-4406 (1991).
- [11] D. C. Jiles: "A Self Consistent Generalized Model for the Calculation of Minor Loop Excursions in the Theory of Hysteresis", *IEEE Trans. Magn.*, **28**, 5, pp. 2602-2604 (1992).
- [12] E. C. Stoner and E. P. Wohlfarth: "A Mechanism of Magnetic Hysteresis in Heterogeneous Alloys", *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **240A**, pp.599-642 (1948).
- [13] G. Friedman: "New Formation of the Stoner-Wohlfarth Hysteresis Model and the Identification Problem", *J. Appl. Phys.*, **67**, 9, 5361-5363, (1990).
- [14] D. L. Atherton and J. L. Beattie: "A Mean Field Stoner-Wohlfarth Hysteresis Model", *IEEE Trans. Magn.*, **26**, 6, 3059-3063 (1990).
- [15] F. Preisach: "Über die Magnetische Nachwirkung", *Zeitschrift für Physik*, **94**, 277-302 (1935).
- [16] I. D. Mayergoyz: *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer-Verlag, New York (1991).
- [17] E. Della Torre: *Magnetic Hysteresis*, IEEE Press, New York (1999).
- [18] 奥村浩士, 木嶋昭: 「ヒステリシス特性のデジタルシミュレーションとその応用」, 電学論, **103-B**, 7, 451-458 (1983).
- [19] 奥村浩士, 松尾哲司, 木嶋昭: 「ヒステリシス特性を持つ非線形系の自励振動の解析」, 信学論, **J70-A**, 6, 882-888 (1987).
- [20] N. Takahashi, S. Miyabara and K. Fujiwara: "Problems in Practical Finite Element Analysis Using Preisach Hysteresis Model", *IEEE Trans. Magn.*, **35**, 3, 1243-1246 (1999).
- [21] G. S. Park, S. Y. Hahn, K. S. Lee and H. K. Jung: "Implementation of Hysteresis Characteristics Using the Preisach Model with M-B Variables", *IEEE Trans. Magn.*, **29**, 2, 1542-1545 (1993).
- [22] S. H. Charap and A. Ktena: "Vector Preisach Modeling", *J. Appl. Phys.*, **73**, 10, 5818-5823 (1993).
- [23] M. A. Krasnosel'skii and A. V. Pokrovskii: *Systems with Hysteresis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1989).
- [24] S. Bobbio, G. Miano, C. Serpico and C. Visone: "Models of Magnetic Hysteresis Based on Play and Stop Hysterons", *IEEE Trans. Magn.*, **33**, 6, 4417-4426 (1997).
- [25] T. Matsuo, Y. Osaka and M. Shimasaki: "Eddy-Current Analysis Using Vector Hysteresis Models with Play and Stop Hysterons", *IEEE Trans. Magn.*, **36**, 1172-1177, (2000).
- [26] M. Brokate: "Some Mathematical Properties of the Preisach Model for Hysteresis", *IEEE Trans. Magn.*, **25**, 4, 2922-2924 (1989).
- [27] G. Miano, C. Serpico and C. Visone: "A New Model of Magnetic Hysteresis, Based on Stop Hysterons: An Application to the Magnetic Field Diffusion", *IEEE Trans. Magn.*, **32**, 3, 1132-1135 (1996).
- [28] T. Matsuo and M. Shimasaki: "Isotropic Vector Hysteresis Represented by Superposition of Stop Hysteron Models", *IEEE Trans. Magn.*, **37**, 5, 3357-3361 and 6, 3995 (2001).
- [29] 榎園正人: 「二次元磁気特性」, 電学論 A, 115-A, 1-8 (1995).